Teoria das Probabilidades

Capítulo 3

1. EXPERIMENTO ALEATÓRIO (E)

Usamos a palavra EXPERIMENTO (E) para descrever qualquer processo que gere resultado.

Exemplos:

E_1: jogar um dado homogêneo e observar o número de sua face superior;

E_2: Jogar uma moeda e observar o resultado;

E_3: Tirar uma carta do baralho e observar seu naipe.

O que os experimentos E_1, E_2 e E_3 acima tem em comum?

O fato de serem experimentos **aleatórios**, uma vez que os resultados obtidos são **incertos**, apesar do prévio conhecimento de todos os resultados possíveis. Em outras palavras, o que caracteriza um experimento aleatório é o fato de sua **repetição**, sob condições inalteradas, **não conduzir necessariamente,** ao mesmo resultado.

Resumindo:

O que caracteriza um Experimento Aleatório (E) ?

a) Cada experimento pode ser repetido indefinidamente sob as mesmas condições;
b) Não se conhece o resultado do experimento "a priori", porém pode-se descrever todos os possíveis resultados.

c) Quando o experimento for repetido um grande número de vezes surgirá uma estabilidade da fração $f = \frac{r}{n}$ (lei dos Grandes Números).

onde:

n – número de repetições

r – número de sucessos de um particular resultado

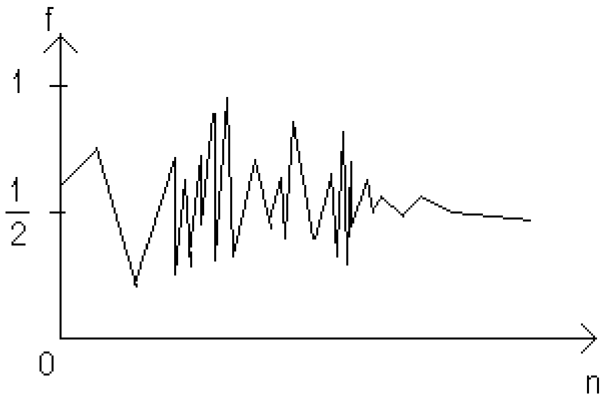


Figura 3.1. Ilustração da Lei dos Grandes Números

Esta regularidade permite a formulação de um modelo matemático para previsões de futuros resultados.

Observação:

Parece claro, que no caso da moeda, a freqüência relativa das aparições de "cara" ou "coroa" se estabilize em 0,5.

O mesmo ocorre nos casos abaixo:

- Dado – f(1) = f(2) ... f(6) = 1/6
- Baralho - f(copas) = f(paus) = f(ouro) = f(espada) = $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

2.ESPAÇO AMOSTRAL (S)

O conjunto de todos os resultado os possíveis de um experimento aleatório é denominado de **Espaço Amostral (S).**

Para os experimentos E_1, E_2 e E_3 descritos anteriormente podemos definir:

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S_2 = \{c, k\}$

S_3 = {copas, paus, espada, ouro}

Atenção:

- Cada resultado individual de S é chamado de "elemento", "membro" ou "ponto amostral".
- Se o espaço amostral é finito, pode-se listar seus elementos.
- Os resultados de um experimento E podem ser descritos por mais de um espaço amostral (Veja exercício 3.1).

Exercício 3.1

Seja o experimento E = jogar um dado e observar o resultado.

- Se estamos interessados no número.

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Se estamos interessados se o número é par ou ímpar.

S_2 = {par, ímpar}

Atenção: Veja que, neste caso, S_1 proporciona mais informação que S_2. Se soubermos qual o elemento de S_1 ocorreu, saberemos o elemento de S_2.)

2.1.LISTAGEM DE S

A listagem de todos os elementos de S pode ser feita pelo diagrama de árvore ou por uma sentença (regra). Veja os exercícios 2.2 e 2.3.

2.1.1. Diagrama de Árvore

Exercício 3.2

Um experimento E consiste em se jogar uma moeda e jogá-la pela segunda vez, caso ocorra uma cara. Se uma coroa ocorre no primeiro lançamento, então um dado é lançado uma única vez. Para listar os elementos de S, temos que construir um diagrama de árvore:

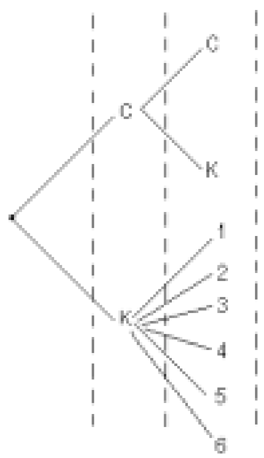


Figura 3.2

S = {(c, c) (c, k) (k, 1) (k, 2)... (k, 6)}

2.1.2. Sentença ou Regra

Caso S tenha um número muito grande de elementos (ou infinito), pode-se descrevê-lo por uma sentença ou regra.

Exercício 3.3

Seja o experimento E = observar o total precipitado um dia

$S = \{x \mid x \geq 0\}$

3.EVENTO

O evento é um **subconjunto** do espaço amostral (E).

Seja o experimento E = jogar um dado. O espaço amostral (S) é dado por:

$S = \{1, 2, 3\ldots 6\}$

Suponha que o evento que estamos interessados seja A = ocorrer um número **par.**

Assim,

$A = \{2, 4, 6\}$

Exercício 3.4

Seja E = Observar a vazão diária do rio Jaguaribe a montante do açude Orós.

O espaço amostral (S) é dado por: $S = \{Q \mid Q \geq 0\}$

O evento que estamos interessados pode ser: A = vazão diária acima de "q" m^3/s

3.1. TIPOS DE EVENTOS

a) Evento nulo ou impossível

$B = \{x \mid x \text{ é par e divisor de } 7\}$

Então $B = \varnothing$, pois os divisores de 7 são 1 e 7, que são números ímpares.

b) Evento certo

Seja E = jogar um dado

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = {x | x é um número natural de 1 a 6}

3.2. COMPLEMENTO DO EVENTO A (A´)

Seja E = jogar um dado

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Se A = o número é par, então:

A = {2, 4, 6}

Então, seu complemento será:

A' = {1, 3, 5} $\rightarrow$ Conjunto de elementos de S que não estão em A.

3.3. OPERAÇÕES COM EVENTOS

a) União e Interseção

Consideremos agora operações com eventos gerando novos eventos, que serão também subconjuntos do mesmo espaço amostral (S).

Considere o experimento E = jogar 1 dado.

Sejam A, B, e C os seguintes eventos:

A – o número é par

B – o número é maior que 3

C – o número é impar

Assim,

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{4, 5, 6\}$

$C = \{1, 3, 5\}$

<u>Interseção</u>

$A \cap B = \{4, 6\}$

$\boxed{A \cap C = \varnothing}$

$B \cap C = \{5\}$

A e C são mutuamente exclusivos.

<u>União</u>

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$

$\boxed{A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}}$

$\downarrow$

$A = C'$

Definições:

A <u>interseção</u> de dois eventos A e B, denotado por $A \cap B$ é o evento que contém todos os elementos que são comuns a A e B.

A <u>união</u> de dois eventos A e B, denotado por $A \cup B$, é o evento que contém elementos que pertencem a A, a B ou a ambos.

3.4. DIAGRAMA DE VENN

<u>Exemplo:</u> Se $M = \{x \mid 3 < x < 9\} \rightarrow M = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

$N = \{y \mid 5 < y < 12\} \rightarrow N = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$M \cap N = \{6, 7, 8\}$

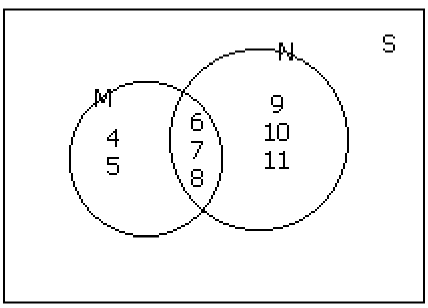


Figura 3.3

Exercício 3.5

Seja o diagrama de Venn:

$A \cap B$ = regiões 1 e 2

$B \cap C$ = regiões 1 e 3

$A \cup C$ = regiões 1, 2, 3, 4, 5, 7

$B' \cap A$ = regiões 7 e 4

$$\begin{cases} B' = S - \text{regiões } 1, 2, 3, 6 \\ A = \text{regiões } 1, 2, 4, 7 \end{cases}$$

$A \cap B \cap C$ = região 1

$(A \cup B) \cap C'$ = 2, 6, 7

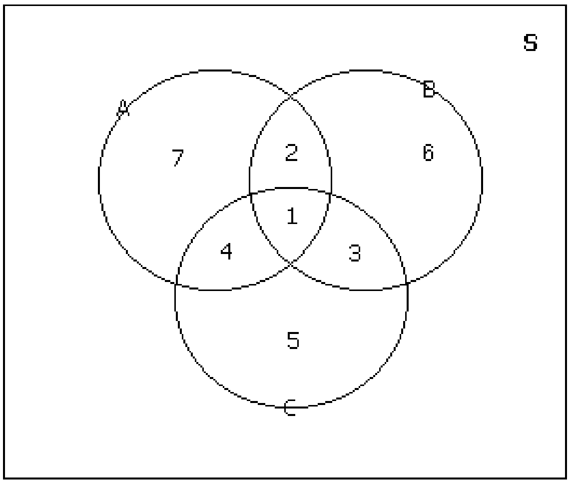


Figura 3.4

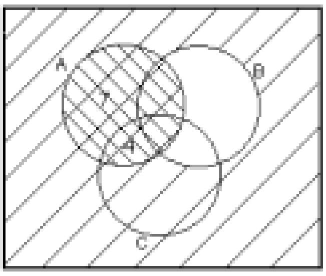


Figura 3.5

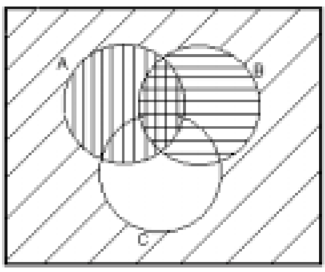


Figura 3.6

Exercício 3.6

Seja o experimento: E = Tirar uma carta de um baralho de 52 cartas e observar o resultado.

Sejam os eventos A, B e C:

A = a carta é vermelha

B = a carta é uma **figura** e é de **ouro**

C = a carta é um **Ás.**

Traçar o Diagrama de Venn

Solução:

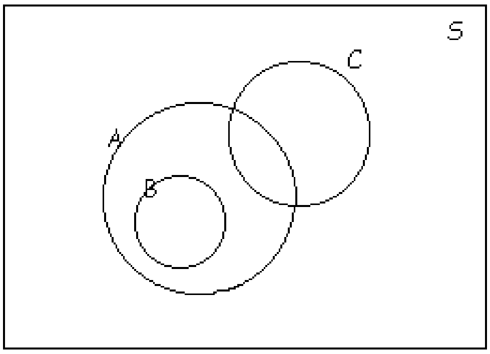


Figura 3.7

4. PROBABILIDADE DE UM EVENTO

(Olhar “A Fascinante História do Risco”, pp. 57 – 61)

Provavelmente foi a inquestionável paixão do homem pelo jogo que desenvolveu a teoria das probabilidades. Na tentativa de aumentar seus ganhos nos “jogos de azar” (“al Zahr” – “dado”, em árabe) os jogadores convocaram os matemáticos para formularem “estratégias” para usar nos jogos. Alguns deles foram Pascal, Leibniz, Fermat e Bernoulli.

O que significam as sentenças abaixo?

- “O Brasil provavelmente vencerá o Chile”.
- “Tenho 50% de chance de obter um número par ao jogar um dado”.
- “A maioria dos graduados estará casada nos próximos três anos”.

Em todos os casos expressamos um resultado que não é CERTO, mas conhecendo os acontecimentos passados ou entendendo a estrutura do fenômeno, podemos ter um certo grau de confiança na nossa afirmação.

Exercício 3.7

Seja E = jogar uma moeda duas vezes e observar o resultado.

Qual a probabilidade de se obter pelo menos 1 cara ?

Solução:

S = (cc, ck, kc, kk)

O evento que queremos: A = {1 cara ou 2 caras} = { ck, kc, cc }

Denotamos por P(A)

$$\boxed{P(A) = \frac{n}{N}}$$

onde: n – número de elementos favoráveis

N – número de elementos possíveis

Assim, P(A) = 3/4

Propriedades:

I. $0 \leq P(A) \leq 1$

II. $P(\varnothing) = 0$

III. $P(S) = 1$

Exercício 3.8

Um dado é construído de tal forma que um número par é duas vezes mais provável de acontecer do que um ímpar.

Seja A = um número menor que 4 ocorre.

Calcular P(A)

Solução:

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = { 1, 2, 3}

Sabemos que:

P(1) = P(3) = P(5) = w

P(2) = P(4) = P(6) = 2w

P(1) + P(2) + ... + P(6) = 1 (propriedade III)

$9w = 1 \rightarrow w = \frac{1}{9}$

Então:

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}}$$

Exercício 3.9

Seja o mesmo dado do exercício anterior

A - um número par ocorre

B - um número divisível por três ocorre

Calcular: $P(A \cup B)$ e $P(A \cap B)$

<u>Solução:</u>

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

A = {2, 4, 6}

B = {3, 6}

Então:

$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$

$$P(A \cup B) = P(2) + P(3) + P(4) + P(6) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

$A \cap B = \{6\}$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{9}$$

Exercício 3.10

Uma caixa com bolas contém 6 vermelhas, 4 azuis e três pretas. Se uma pessoa escolhe aleatoriamente 1 destas bolas, ache a probabilidade de escolher:

a) 1 vermelha

b) 1 azul ou 1 preta

<u>Solução:</u> n = 6 + 4 + 3 = 13 bolas (todas as bolas são igualmente prováveis)

a) $P(V) = \frac{6}{13}$

b) $P(A \cup P) = \frac{4+3}{13} = \frac{7}{13}$

5. TÉCNICAS DE CONTAGEM DOS PONTOS DO ESPAÇO AMOSTRAL

A análise combinatória lida essencialmente com problemas de contagem. Às vezes, a contagem direta dos possíveis resultados é muito trabalhosa. Por isso desenvolveram-se as técnicas de contagem indireta.

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Se um acontecimento é composto por duas etapas sucessivas, independentes uma da outra, e

- a etapa 1 pode ocorrer de n modos
- a etapa 2 pode ocorrer de m modos

Então o número de possibilidades de ocorrência do acontecimento é n. m

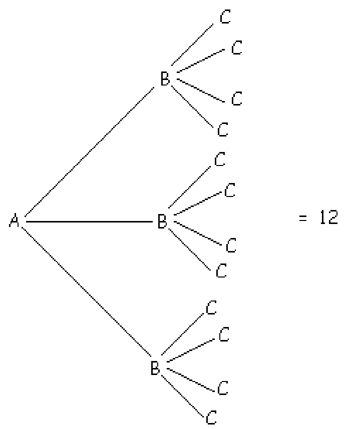
Exercício 3.11

Pode-se ir da cidade A para a cidade B de 3 maneiras diferentes e de B para a cidade C de 4 maneiras. De quantas maneiras diferentes pode-se ir das cidades A para C ?

Solução:

A $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ **B** $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ **C** = 12 (PFC)

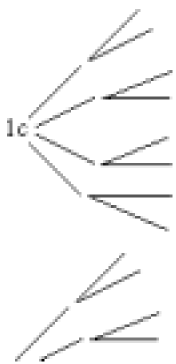
ou usando a **árvore de possibilidades**:



Exercício 3.12

Uma pessoa dispõe de 3 calças, 4 camisas e 2 pares de sapato. De quantas formas esta pessoa pode estar vestida?

3 . 4 . 2 = 24 ou



Na Análise Combinatória existem 3 tipos de agrupamentos que merecem atenção especial – os **ARRANJOS**, as **PERMUTAÇÕES** e as **COMBINAÇÕES.**

5.1 ARRANJO

"n" elementos **distintos** tomados "p" a "p"

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

a ordem dos elementos é **importante**!

Ex.: $32 \neq 23$

Lembre-se

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ 1! = 1 \\ n! = n.(n-1).(n-2)\ldots \end{cases}$$

Exercício 3.13

Quantos números de 3 dígitos podem ser formados pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Solução: a ordem importa!

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 120$$

Exercício 3.14

Quantos números pares podem ser formados dos números acima? (ainda com 3 dígitos)

- Terminado com 2 **(Fixei um!)**

$$A_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5.4.3!}{3!} = 20$$

Terminado com 4 $\rightarrow$ 20

Terminado com 6 $\rightarrow$ 20

60 maneiras!

5.2 PERMUTAÇÃO

"n" elementos **distintos**

arranjados **n** a **n**

$$A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1!} = n! = P_n$$

$\boxed{P_n = n!}$ $\rightarrow$ Caso particular de **arranjo**

Exercício 3.15

De quantas maneiras pode se ter as letras a, b, c e d ?

$P_4 = 4! = 24$ maneiras

5.2.1. PERMUTAÇÃO COM ELEMENTOS REPETIDOS

O número de permutações de n elementos, onde n_1 são de um tipo, n_2 de outro tipo... é:

$$\boxed{P_n^{n_1, n_2 \ldots n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_r!}}$$

Onde $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots n_r = n$

Exercício 3.16

Quantos anagramas podem ser formados com a palavra ROMARIA ?

Solução: $n = 7$

$n_1 = 2$ (R)

$n_2 = 2$ (A)

$n_3 = n_4 = n_5 = 1$ (O, M, I)

$$P_7^{2,2,1,1,1} \text{ ou } P_7^{2,2} = \frac{7!}{2!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 1.260$$

5.2.2 PERMUTAÇÕES CIRCULARES

O número de maneiras de distribuir n elementos distintos em forma de círculo é igual a:

$$PC_n = (n - 1)!$$

5.3. COMBINAÇÃO

$\begin{cases} \text{n elementos distintos} \\ \text{tomados p a p} \end{cases}$

→ **A ordem não é importante**

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

Exercício 3.16

Quantas combinações podem ser formadas por 6 jogadores de xadrez.

(Partida = 2 pessoas!)

Solução:

→ tanto faz $\begin{cases} (x\ .\ y) \\ (y\ .\ x) \end{cases}$ a ordem não importa!

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times !}{2!\;4!} = 15$$

Exercício 3.17

Sabendo-se que o grupo é formado por 4 químicos e 3 físicos, qual o número de comitês que pode ser formado por 2 químicos e 1 físico.

Solução:

O número de maneiras de selecionar 2 químicos de um total de 4 é:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!\;2!} = 6$$

1 físico de 3 físicos

$$C_{3,1} = \frac{3!}{1!\,(2!)} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3$$

Assim = 6 · 3 = 18 maneiras.

6. TEOREMA DA SOMA

Sejam A e B dois eventos quaisquer. Então,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

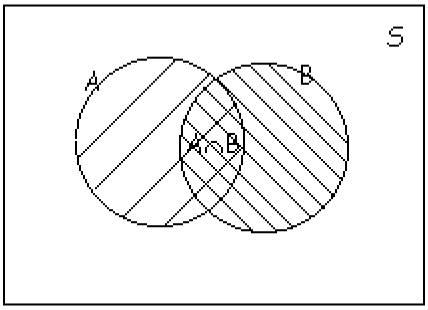


Figura 3.8

Se A e B forem mutuamente exclusivos, então,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

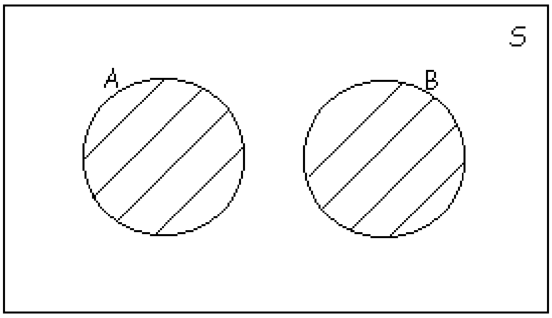
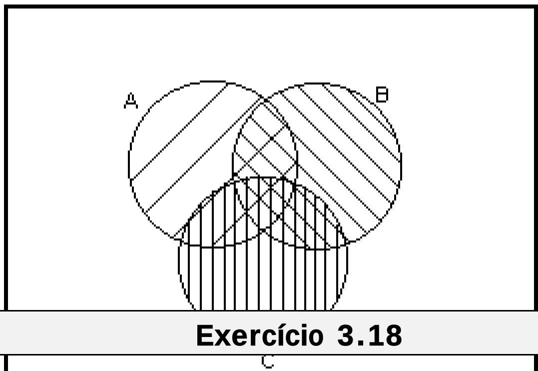


Figura 3.9

Sejam A, B e C três eventos. Então,

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$



Exercício 3.18

A probabilidade de Paulo passar em Matemática é 2/3 e a probabilidade de passar em Inglês é 4/9. Se a probabilidade de Paulo passar em ambas as disciplinas é 1/4, qual a probabilidade de que Paulo passe em pelo menos uma das duas disciplinas?

Solução:

$P(M) = \frac{2}{3}$ $\quad P(I) = \frac{4}{9}$ $\quad P(M \cap I) = \frac{1}{4}$

Pelo Teorema da Soma:

$P(M \cup I) = P(M) + P(I) - P(M \cap I) = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{31}{36}}$

7. PROBABILIDADE CONDICIONAL

Seja o experimento **E** e seu espaço amostral **S**:

E: lançar um dado e verificar o resultado

S = {1,2,3...6}

Seja o evento A: sair o nº 3

Então,

P(A) = 1/6

Considere agora:

B = {sair um número ímpar} = {1, 3, 5}

Calcular agora P(A), dado que já ocorreu o evento B.

P(A) = 1/3

É no novo espaço amostral <u>reduzido</u> que se avalia a probabilidade de A.

DEFINIÇÃO:

Dados dois eventos A e B, denota-se por P(A/B) a probabilidade condicional do evento A, dado que ocorreu B, por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ Se P(B) > 0

Exercício 3.19 (Jairo da Fonseca)

Dois dados são lançados:

Considere os eventos:

A= $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 10\}$

$B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\}$

Avaliar:

a) P(A)

b) P(B)

c) P(A/B)

d) P(B/A)

Solução:

S =					
(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(65,)	(6, 6)

a) A = {(6, 4) (5, 5) (4, 6)} (verde)

P(A) = 3/36 = 1/12

b) P(B) = 15/36 (amarelo)

c) $P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1 / 36}{15 / 36} = \frac{1}{15}$

d) $P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1 / 36}{3 / 36} = \frac{1}{3}$

Exercício 3.20 (Walpole , 35)

Numa dada cidade, tem-se a seguinte situação:

Tabela 3.1

	Empregados	Desempregados	Total
Homens	460	40	500
Mulheres	140	260	400
	600	300	900

Sejam os eventos:

H = um homem é escolhido

E = o escolhido está empregado

Qual a probabilidade de um homem ser escolhido, dado que está empregado?

Solução:

$$P(H/E)=\frac{P(H\cap E)}{P(E)}=\frac{460/900}{600/900}$$

Exercício 3.21 (Walpole , 36)

A probabilidade de um vôo regular partir no horário é P (D) = 0,83 ; a probalidade desde vôo chegar no horário é P (A) = 0,82; a probalidade de que parta e chegue no horário P (D∩A) = 0,78. Calcule:

a) A probabilidade do vôo chegar no horário tendo saído no horário e

b) A probabilidade do vôo ter saído no horário dado que chegou no horário.

P (D) = 0,83

P (A) = 0,82

P (D ∩A) = 0,78

Solução:

a) $P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{0{,}78}{0{,}83}=0{,}94$

b) $P(D/A)=\frac{P(A\cap D)}{P(A)}=\frac{0{,}78}{0{,}82}=0{,}95$

A probabilidade condicional proporciona a <u>reavaliação</u> da probabilidade de ocorrência de um evento dado que outro ocorre. A probabilidade P(A/B) é uma “<u>atualização</u>” de P(A), baseada no conhecimento que B ocorreu.

Exercício 3.22

Ainda no exemplo anterior. Sabe-se que a probabilidade do vôo sair no horário é P (D) = 0,83.

É sabido que o <u>vôo não partiu</u> no horário. Qual a probabilidade do <u>vôo chegar</u> no horário?

Solução:

Sabe-se que:

P (A) = 0,82 P (D) = 0,83 P (D$\cap$A) = 0,78

P(D) = 0,83

P(D') = 0,17 (probabilidade do vôo não partir no horário)

P(A/D') = ?

$$P(A / D') = \frac{P(A \cap D')}{P(D')} = \frac{0,04}{0,17} = 0,24$$ VER TABELA

Tabela 3.2.

	(D) Partir no Horário	(D') Não partir no horário	
Chegar no Horário (A)	**0,78**	0,04	**0,82**
Não Chegar no Horário (A')	0,05	0,13	0,18
	0,83	0,17	**1,00**

Como muda !

P (A) = 0,82

Atualizei a informação dizendo que o vôo não partiu no horário.

P(A/D') = 0,24

8. TEOREMA DO PRODUTO

"A probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos A e B, do mesmo espaço amostral, é igual ao produto da probabilidade de um deles pela probabilidade condicional do outro, dado o primeiro."

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

NADA MAIS É QUE PROBABILIDADE CONDICIONAL !!!

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(B).P(A/B)}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B/A)$$

Exercício 3.23

Em um lote de 12 peças, 4 são defeituosas. Duas peças são retiradas, uma após a outra, sem reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam boas?

Solução:

A $\rightarrow$ a 1^a peça é boa

B $\rightarrow$ a 2^a peça é boa

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = \frac{4}{33}$$

9. INDEPENDÊNCIA ESTATÍSTICA

É a **segunda conseqüência** da probabilidade condicional.

(ainda no aeroporto) (Walpole, 37)

$$\begin{cases} P(D) = 0,83 \\ P(A) = 0,78 \\ P(A/D) = 0,94 \rightarrow \neq P(A) \\ P(D/A) = 0,95 \rightarrow \neq P(D) \end{cases}$$

“A” influencia “D” e “D” influencia “A”.

Entretanto, se para dois eventos A e B:

$$\boxed{P(A/B) = P(A)}$$

→ Implica que A não é influenciado pelo B, ou seja a ocorrência de A é INDEPENDENTE da ocorrência de B.

Pelo Teorema do produto:

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$

DEFINIÇÃO:

Dois eventos A e B são independentes, se:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dados “n” eventos $\mathbf{A_1, A_2 \ldots A_n}$, diz-se que eles são independentes se o forem 2 a 2, 3 a 3... **n** a **n**.

Ou seja,

Dados 3 eventos A, B e C.

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \\ \end{cases}$$

Exercício 3.24

Sendo S = {1, 2, 3, 4} um espaço amostral equiprovável

Sejam A = {1, 2} B = {1, 3} C = {1, 4}, três eventos de S.

Verificar se A, B e C são independentes.

Solução:

→ Se forem independentes:

$$\begin{cases} P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C) \\ P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \end{cases}$$

Tem que se atender a todos!

1) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$A \cap B = \{1\}$ $\qquad$ $P(A) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ Igual !

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ $P(B) = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

2) $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$A \cap C = \{1\}$ $\qquad$ Igual !

$P(A \cap C) = \frac{1}{4}$

3) $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$B \cap C = \{1\}$ $\qquad$ Igual !

$P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

4) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/8$

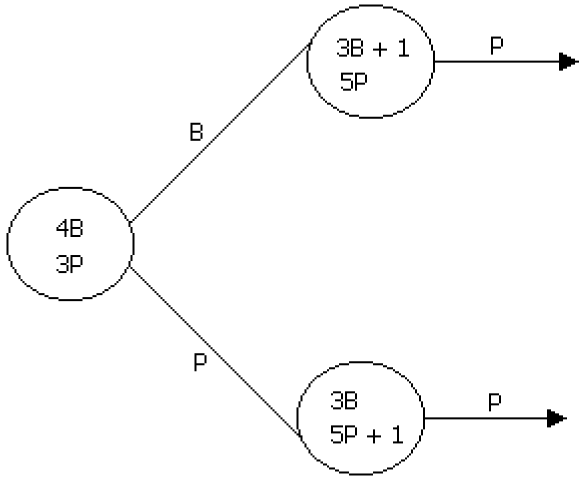
$A \cap B \cap C = \{1\}$

$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$ $\qquad$ Diferentes !

→ Não atende às 4 exigências A, B e C <u>não são independentes !</u>

Exercício 3.25 (Walpole, 39)

Um saco contém 4 bolas brancas e 3 bolas pretas. Um segundo saco contém 3 bolas brancas e 5 pretas. Uma bola é retirada do primeiro saco e colocada no segundo. Qual a probabilidade de se retirar uma bola preta do segundo saco?



Solução:

Se eu denominar os eventos:

A – $B_1 \cap P_2$

B – $P_1 \cap P_2$

Interesse: ou o evento **A** ou o evento **B**

$\boxed{(A \cup B)}$

Pelo teorema da soma:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) + \cancel{P(A \cap B)}$ ← **= 0 pois são mutuamente exclusivos**

$P(A) \rightarrow P(B_1 \cap P_2)$

Probabilidade Condicional **Teorema do produto**

$$P(P_2 / B_1) = \frac{P(P_2 \cap B_1)}{P(B_1)} \rightarrow P(P_2 \cap B_1) = P(P_2 / B_1).P(B_1)$$

$$P(P_2 \cap B_1) = \left(\frac{5}{9}\right).\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{20}{63}$$

$P(B) = P(P_1 \cap P_2)$, Pelo teorema do produto...

$P(P_1 \cap P_2) = P(P_2/P_1) \cdot P(P_1)$

$P(P_1 \cap P_2) = \frac{6}{9} \cdot \frac{3}{7} = \frac{18}{63}$

$P(P_1 \cap P_2) = \frac{18}{63}$

$$\boxed{P((P_2 \cap B_1) \cup (P_1 \cap P_2)) = \frac{20}{63} + \frac{18}{63} = \frac{38}{63}}$$

Exercício 3.26

Uma pequena cidade tem um extintor de incêndio e uma ambulância disponíveis para emergências. A probabilidade do extintor estar disponível quando necessário é de 0,98 e a probabilidade da ambulância estar disponível quando chamada é de 0,92. No caso de um acidente com vítimas resultante de um incêndio em um edifício, qual a probabilidade de que tanto o extintor como a ambulância estejam disponíveis ?

Solução:

$P(E) = 0{,}98$

$P(A) = 0{,}92$

pois são eventos independentes!

$P(E \cap A) = P(E) \cdot P(A) = 0{,}98 \cdot 0{,}92 = 0{,}9016$

---

10. GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DO PRODUTO

Se, em um experimento E, os eventos, A_1, A_2, A_3, ... An podem ocorrer, então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n - 1)$$

Exercício 3.27

Três cartas são retiradas sucessivamente de um baralho, sem reposição. Calcule a probabilidade de que o evento $\mathbf{A_1 \cap A_2 \cap A_3}$ ocorra, sabendo-se que A_1 é o evento da 1ª carta ser um ás vermelho, A_2 é o evento da 2ª carta ser um 10 ou um valete e A_3 é o evento da 3ª carta ser maior do que 3 mais menor do que 7.

Solução:

A_1 = a 1ª carta ser um ás vermelho

$$P(A_1) = \frac{2}{52}$$

A_2 = a 2ª carta ser um 10 **ou** um valete

$$P(A_2 / A_1) = \frac{8}{51} \qquad \text{(Há 4 dez e 4 valetes)}$$

A_3 = a 3ª carta ser maior do que 3, mas menor do que 7

$$P(A_3 \ / \ A_1 \cap A_2) = \frac{12}{50} \qquad \{4, 5, 6\} = 3 \text{ cartas} \cdot 4 \text{ naipes} = 12$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cap A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{8}{52} \cdot \frac{8}{51} \cdot \frac{12}{50}$$

Exercício 3.28 (Walpole, 46)

Em uma fábrica, 3 máquinas B_1, B_2 e B_3 fazem, respectivamente, 30%, 45% e 25% dos produtos. Sabe-se de experiências passadas que 2%, 3% e 2%, respectivamente dos produtos fabricados são defeituosos. Suponha que um produto seja escolhido ao acaso. Qual a probabilidade de ele ser defeituoso ?

Solução:

$P(B_1) = 0{,}30$

$P(B_2) = 0,45$

$P(B_3) = 0,25$

$P(D/B_1) = 0,02$

$P(D/B_2) = 0,03$

$P(D/B_3) = 0,02$

$P(D) = ?$

Pelo Teorema da Probabilidade Total:

$P(D) = P(B_1) \cdot P(D/B_1) + P(B_2) \cdot P(D/B_2) + P(B_3) \cdot P(D/B_3)$

$= (0,30)\ (0,02) + (0,45)\ (0,03) + (0,25)\ (0,02)$

$= 0,006 + 0,0135 + 0,005 = 0,0245$

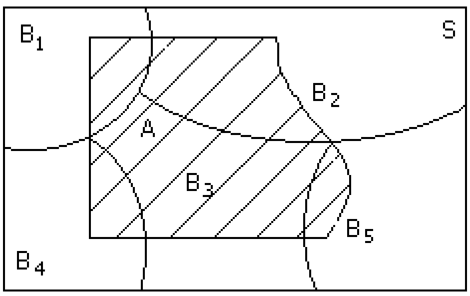
Exercício 3.29

Se no lugar de perguntarmos qual o $P(D)$, quisermos saber $P(B_i/D)$. Ou seja, um produto foi escolhido ao acaso e verificou-se que é defeituoso. Qual a probabilidade de ter sido fabricado pela máquina B_i ?

→ Questões deste tipo podem ser respondidas pelo **Teorema de Bayes.**

11. TEOREMA DE BAYES

Sejam B_1, B_2, $B_3 \ldots B_n$, n eventos mutuamente exclusivos, tais que: $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S$. Sejam $P(B_i)$ as probabilidades conhecidas dos vários eventos e A um evento qualquer de S, tal que são conhecidas todas as probabilidades condicionais $P(A/B_i)$



Então, tem-se que:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i).P(A/B_i)}{P(B_i).P(A/B_i) + P(B_2).P(A/B_2) + ... + P(B_n).P(B_n).P(A/B_n)}$$

ou, mais geral

$$P(B_r / A) = \frac{P(B_r).P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i).P(A/B_i)}$$

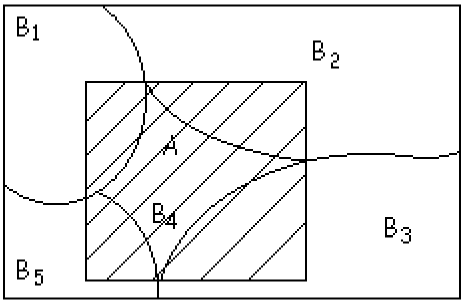
Demonstração

$$P(B / A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$ Probabilidade Condicional (Teorema do Produto)

Generalizando

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

Mas,



$\rightarrow$ $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) + ...$

ou seja,

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

Então,

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} (B_i \cap A)}$$

mas, pelo Teorema do Produto (conseqüência da probabilidade condicional)...

$P(B_i \cap A) = P(B_i / A) \cdot P(A)$

ou

$P(B_i \cap A) = P(A/B_i) \cdot P(B_i)$

mas, por definição, sabemos

assim,

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \,.\, P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \,.\, P(A/B_i)}$$

c.q.d.

Resolvendo o Exercício 3.29 (das máquinas). Sabemos que:

$P(B_1) = 0{,}30$

$P(B_2) = 0{,}45$

$P(B_3) = 0{,}25$

$P(D/B_1) = 0{,}02$

$P(D/B_2) = 0{,}03$

$P(D/B_3) = 0{,}02$

É defeituosa! Qual a probabilidade de ter sido fabricada pela máquina B_3 ?

$$P(B_3 / D) = \frac{P(B_3) \,.\, P(D/B_3)}{P(B_i) \,.\, P(D/B_i) + P(B_2) \,.\, P(D/B_2) + P(B_3) \,.\, P(D/B_3)}$$

$$P(B_3 / D) = \frac{(0{,}25) \,.\, (0{,}02)}{(0{,}25) \,.\, (0{,}02) + (0{,}45) \,.\, (0{,}03) + (0{,}25) \,.\, (0{,}02)} = \frac{10}{49} = 0{,}2041$$

Exercício 3.30 (Jairo da Fonseca, 29)

Escolheu-se uma urna ao acaso e dela extraiu-se uma bola também ao acaso, verificando-se que a bola é branca. Qual a probabilidade da bola ter vindo da urna 1 ? E da urna 2 ?

Tabela 3.3.

Cores	Urnas			
	U_1	U_2	U_3	total
Pretas	3	4	3	10
Brancas	1	3	3	7
Vermelhas	5	2	3	10
Total	9	9	9	27 bolas

$P(U_1) = 9/27 = 1/3$

$P(U_2) = 9/27 = 1/3$

$P(U_3) = 9/27 = 1/3$

a) $$P(U_1 / B_r) = \frac{P(U_1) \cdot P(B_r / U_1)}{P(U_1) \cdot P(B_r / U_1) + P(U_2) \cdot P(B_r / U_2) + P(U_3) \cdot P(B_r / U_3)}$$

$P(B_r/U_1) = 1/9$ $\qquad$ $P(B_r/U_2) = 3/9$ $\qquad$ $P(B_r/U_3) = 3/9$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}}$$

$$= \frac{1/27}{7/27}$$

$$= \frac{1}{27} \cdot \frac{27}{7} = \boxed{\frac{1}{7}}$$

$$P(U_2 / B_r) = \frac{P(U_2) \cdot P(B_r / U_2)}{7/27} = \frac{1/3 \cdot 3/9}{7/27} = \frac{3/27}{7/27}$$

$$= \frac{3}{27} \cdot \frac{27}{3} = \frac{3}{7}$$

voltando ao exercício 4 e 5 multiplicando por 100:

Tabela 3.4.

	B_1	B_2	B_3
Defeituosa	0,6	1,35	0,5
	30	45	25

multiplicado por 100

Tabela 3.5

	B1	B2	B3	total
Defeitos	60	135	50	245
	3.000	4.500	2.500	10.000

$$P(def) = \frac{245}{10.000} = 0{,}0245$$

$$(B_3/D) = \frac{50}{245} = \frac{10}{49} \quad \text{(igual!)}$$