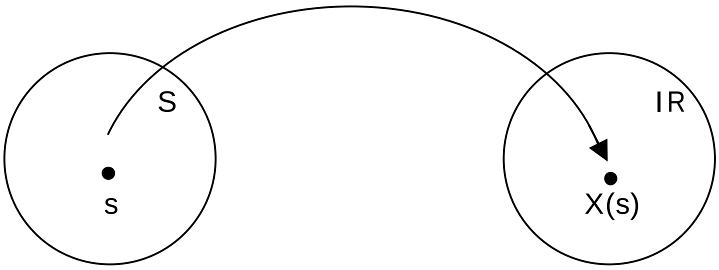
Capítulo 4

Variável Aleatória

1. VARIÁVEL ALEATÓRIA (X) (Walpole, S_1)

É a função que associa um número real a cada elemento do espaço amostral.



Onde

S → espaço amostral

s → elemento do espaço amostral S

Suponha:

E → jogar uma moeda três vezes

S = {(ccc), (kcc), (ckc), (cck), (kkk), (kkc), (kck), (ckk)}

→ Variável aleatória diz respeito à <u>característica</u> do experimento que queremos estudar.

Suponha que:

<u>Característica</u> = número de caras nos 3 lançamentos da moeda.

Quais os valores assumidos pela variável aleatória ?

x = 0 {(kkk)}

x = 1 {(kkc)(kck)(ckk)}

x = 2 {(kcc)(ckc)(cck)}

x = 3 {(ccc)}

Exercício 5.1.

Duas bolas são retiradas sucessivamente, sem reposição, de uma caixa que contém 4 bolas vermelhas e 3 pretas. Seja X a variável aleatória "número de bolas vermelhas retiradas no experimento" Quais os valores assumidos por "X" ?

Solução:

S = {vv, vp, pv, pp}

Então

x = {2, 1, 1, 0}

ou seja,

$\boxed{x = 0, 1, 2}$

Notação:

$\boxed{X = x}$

Onde:

$X \rightarrow$ variável aleatória

$x \rightarrow$ valores assumidos pela variável aleatória

2.TIPOS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

- **Discretas** $\rightarrow$ O número de valores assumidos por X for finito (ou infinito), formados apenas por números inteiros.
- **Continua** $\rightarrow$ O número de valores assumidos por X é formado pelo números de pontos de um segmento de reta.

Exercício 5.2.

- número de dias chuvosos em um mês.
- Precipitação diária medida no pluviômetro
- número de alunos presentes na sala de aula
- vazão em uma dada seção do rio
- idade dos alunos de uma sala
- peso dos alunos desta sala
- número de disciplinas cursadas por aluno
- evaporação mensal de um açude
- velocidade do vento

Quais são DISCRETAS e quais são CONTÍNUAS ?

2.1. PROCESSOS HIDROLÓGICOS

Algumas Considerações (Lanna, ABRH 4, pags 80 – 81)

Os processo hidrológicos são ESTOCÁSTICOS, portanto ele trata com variáveis aleatórias hidrológicas.

Os processo hidrológicos se desenvolvem no tempo e no espaço.

Exercício 5.3.

A chuva tem variação ao longo do tempo e ao longo do espaço. Ou seja, para ser absolutamente preciso, haveria necessidade das coordenadas latitude(x), longitude(y), altitude(z) e tempo(t).

X = f(x, y, z, t)

O mesmo ocorre para grande parte dos processos hidrológicos.

- Para facilitar a análise, costuma-se fixar-se o local onde o processo será estudado.

  Ex.: Precipitação no pluviômetro da Estatística Meteorológica da Funceme

  X = f(t)

- Quando for importante o estudo da variabilidade espacial, fixa-se o tempo.

  Ex: Variabilidade espacial dos totais precipitados no mês de março de 2000 no Estado do Ceará.

Os processo hidrológicos são, geralmente, contínuos no tempo e no espaço. A qualquer tempo e local eles podem ser medidos.

Por simplificação as séries temporais são obtidas por valores obtidos em instantes ou períodos sucessivos de tempo.

Ex.: Níveis de água de uma dada seção do rio

$\rightarrow$ medidas às 7 e 17 horas $\rightarrow$ média dos 2

Ex.: Chuva em 1 pluviômetro

$\rightarrow$ 7 hs da manhã às 7 hs do outro dia

Ex.: Chuvas máximas anuais

→ Série formada pelo dia que choveu mais no ano.

Resumindo:

- Processo hidrológico é contínuo
- Medições – discretizado
- Variável pode ser discreta ou continua – dependendo do objetivo da análise.

Ex.: Chuva em um pluviômetro X

Variável aleatória - número de dias sem chuva

Variável aleatória - número de dias com chuva superior à 20 mm

Variável aleatória – total precipitado diário, mensal e anual

2.2. VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA (Walpole, 53)

2.2.1. FUNÇÃO MASSA DE PROBABILIDADE

Uma variável aleatória discreta assume cada um dos seus valores com uma certa probabilidade.

Ex.: E: Jogar 3 moedas e observar o resultado

S: {(ccc)(cck)(ckc)(kcc)(kkk)(kkc)(kck)(ckk)}

X = número de caras (c)

x	0	1	2	3
P(X = x)	1/8	3/8	3/8	1/8

Note que os valores de X esgotam todas as possibilidades, sendo que $\sum P(X = x) = 1$.

Freqüentemente é conveniente representar todas as possibilidades da v.a. X por uma fórmula. Tal fórmula será necessariamente função dos valores de x que denotamos por f(x), g(x), h(x) etc.

Assim, escrevemos que $f(x) = P(X = x)$, ou seja, $f(3) = P(x = 3)$. O conjunto dos pontos ordenados $(x, f(x))$ é chamado de Função Probabilidade, Função Massa de Probabilidade ou Distribuição de Probabilidade da variável aleatória discreta X.

Propriedades:

1. $F(x) \geq 0$
2. $\sum f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

2.2.2. FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES OU FUNÇÃO REPARTIÇÃO

$F_x(x) = P(X \leq x)$

$\rightarrow$ É a distribuição acumulada

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{t=-\infty}^{x} P(X = x)$$

Propriedades:

1. $F(-\infty) = 0$

   $P(X \leq -\infty) = 0$
2. $F(+\infty) = 1$

   $P(X \leq +\infty) = 1$
3. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

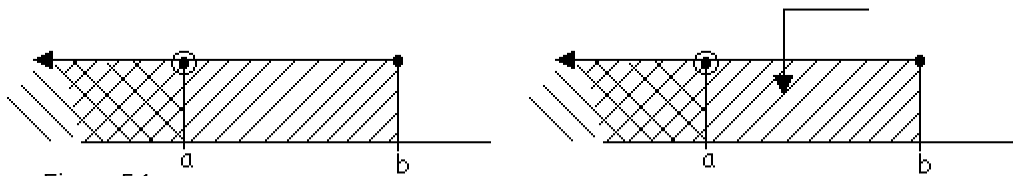


Figura 5.1.

$F(b) = P(x \leq b)$

$F(a) = P(x \leq a)$

4. $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) + P(x = a)$

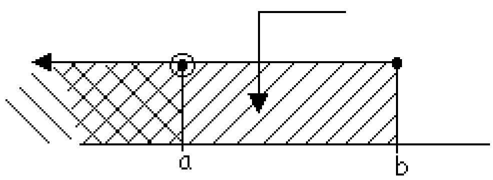


Figura 5.2.

5. $P(a \leq x < b) = F(b) - F(a) + P(x = a) - P(x = b)$

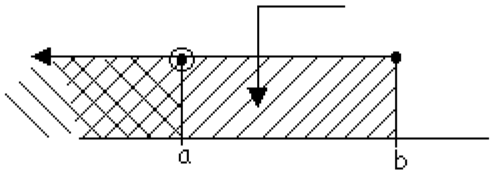


Figura 5.3

6. $P(a < x < b) = F(b) - F(a) - P(x = b)$

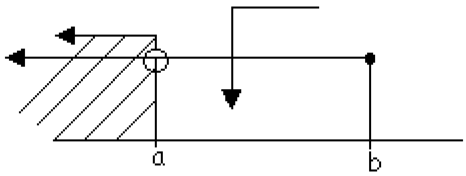


Figura 5.4

Exercício 5.4.

Lançamento de 2 moedas (E)

S = { (cc) (ck) (kc) (kk) }

X = n° de caras obtidas

a) Função Massa de Probabilidade

x	0	1	2
P(X = x)	1/4	2/4	1/4

b) F. D. P. ou Função Repartição (F(x))

$F(0) = P(X \leq x) = \frac{1}{4}$

$F(1) = P(X \leq 1) = P(0) + P(1) = \frac{3}{4}$

$F(2) = P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = 1$

Atenção:

A F.D.P. é definida não apenas para os valores assumidos pela variável aleatória X, mas para todos os números reais.

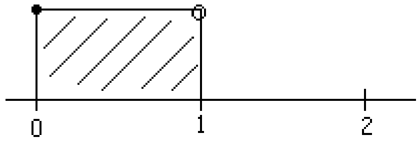
Ou seja:

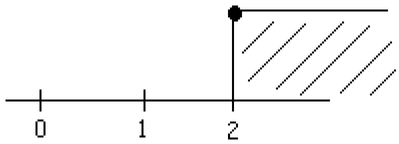
$F(x) = 0$ se $x < 0$

$F(x) = \frac{1}{4}$ se $0 \leq x < 1$

$F(x) = \frac{3}{4}$ se $1 \leq x < 2$

$F(x) = 1$ se $x \geq 2$





$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x > 0 \\ 1/4, & \text{se } 0 < x < 1 \\ 3/4, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

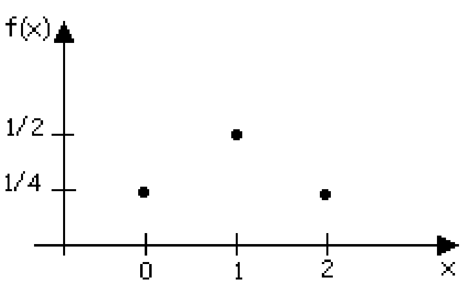
Gráficos

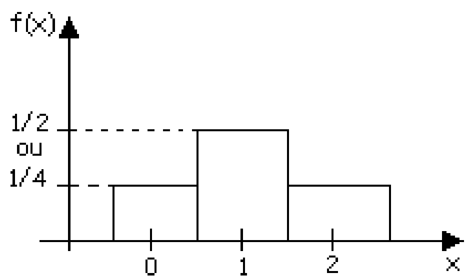
Resumindo notação

$F(x) = P(X = x)$

$F(x)$ ou $F_x(x) = P(X \leq x)$

2.2.3. FUNÇÃO MASSA DE PROBABILIDADE (f.m.p)





histograma de probabilidades
Construído de forma que o ponto central é "x" e a altura é f(x)

2.2.4. F.D.P (FUNÇÃO REPARTIÇÃO)