VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA (cont)

1.1. FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE (F.D.P.)

Seja x uma variável aleatória contínua. A função densidade de probabilidade f(x) é uma função que satisfaz as seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0, \quad \text{para } x \in \text{IR}$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

3. $P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x).dx$

< b)

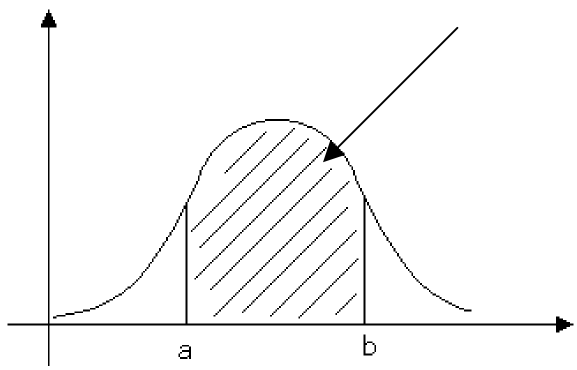

Figura 6.1.

(Jairo da Fonseca, 43)

observações:

1. para variável aleatória contínua P(X = x) = 0

pois

$$P(X = x) = \int_{x}^{x} f(x)dx = 0$$

Sendo assim para uma variável aleatória contínua:

$P(a \le X \le b) = P(a < X < b) = P(a \le x < b) = P(a < x < b)$

2. f(x) não é probabilidade

Somente quando a função é integrada entre dois limites ela produzirá uma probabilidade, que será a área sob a curva da função entre x = a e x = b; a < b.

1.2. FUNÇÃO REPARTIÇÃO OU FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE (FDP)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x).dx$$

Exercício 6.1. (Jairo da Fonseca, 44)

Seja x uma variável aleatória contínua, com a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} 2x \text{ para } 0 < x < 1 \\ 0 \text{ para quaisquer outros valores} \end{cases}$$

a) f(x) é f.d.p. ?

1. $f(x) \ge 0 \quad \text{para} \quad x \in R$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1?$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{-\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{1} 2xdx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = 1 - 0 = 1$$

Seu gráfico

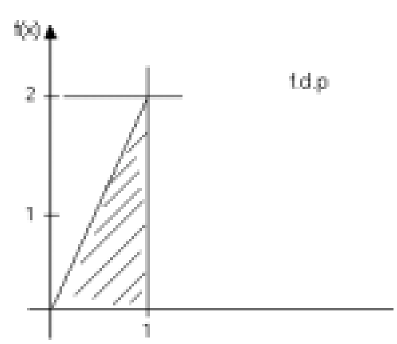

Figura 6.2.

b) Função repartição

para $x < 0 \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$

para $0 \leq x < 1 \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} 2x \cdot dx = x^2$

para $x \geq 1 \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 2x \cdot dx + \int_{1}^{x} 0dx = 1$

gráfico

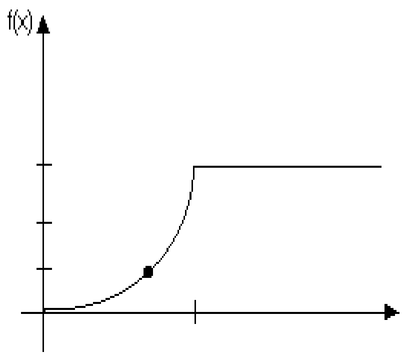

Figura 6.3

c) $p\left(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4}\right)$

$$= \int_{1/4}^{3/4} f(x)dx = \int_{1/4}^{3/4} 2x \cdot dx = \left.\frac{2x^2}{2}\right|_{1/4}^{3/4}$$

$$= \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Exercício 6.2. (Jairo da Fonseca, 42)

Uma variável aleatória tem a seguinte f.d.p.

$x < 0 \qquad f(x) = 0$

$0 \le x < 1 \qquad f(x) = kx^2$

$x \ge 1 \qquad f(x) = 0$

a) K = ?

b) F(x) = ?

Solução:

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} kx^2 dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = 1 \qquad \text{(por definição!)}$$

$$= k\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1 \quad \therefore \quad \frac{k}{3} = 1 \quad \therefore \boxed{k = 3}$$

b) Tenha $f(x) \rightarrow$ quero $F(x)$

$$x < 0 \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0$$

$$0 \le x < 1 \rightarrow F(x) = \int_{0}^{x} 3x^2 dx = \frac{3x^2}{3}\Big|_0^x = x^3$$

$$x \ge 1 \rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{x} f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{1} 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3}\Big|_0^1 = 1$$

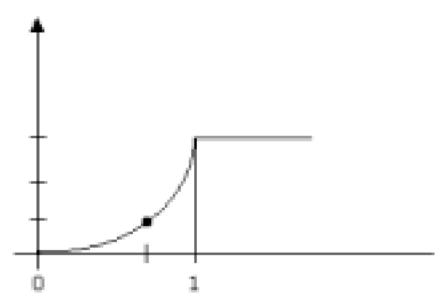

Figura 6.4

Exercício 6.3. (Walpole, 58)

Suponha que o erro em um dado experimento laboratorial seja uma v.a. contínua x que tem a seguinte f.d.p.:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) verifique a propriedade

b) $P(0 < x \leq 1) = ?$

c) ache F(x)

Solução:

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)dx$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{x^3}{9}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{9} - \left[\frac{-1}{9}\right] = \frac{9}{9} = 1$$

b) $\displaystyle P(0 < x \leq 1) = \int_{0}^{1} \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{9}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{9}$

c) $\displaystyle F(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x < -1 = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx = 0$

$$F(x) = \frac{x^3 - 1}{9} \rightarrow \quad -1 \leq x < 2 = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{x} f(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^{x} \frac{x^2}{3} = \frac{x^3}{9}\Big|_{-1}^{x} = \frac{x^3 - 1}{9}$$

$$F(x) = 1 \quad \rightarrow \quad x \geq 2 = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} + \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx + \int_{2}^{-\infty}$$

$$= \frac{x^3}{9}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8+1}{9} = 1$$